Rationale Dreiecke, Vierecke und Tetraeder.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde eingereicht bei der hohen philosophischen Fakultät der Universität Leipzig

von

Fritz Neiß

aus **Dietzenbach** (Kr. Offenbach).

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Weida i. Th.
Druck von Thomas & Hubert
Spezialdruckerei für Dissertationen
1914.

Angenommen von der III. Sektion auf Grund der Gutachten der Herren

Rohn und **Hölder.**

Leipzig, den 12. März 1914.

Der Procancellar.
Kirchner.

Meiner lieben Mutter.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547026_0054

Die Frage nach der Ganzzahligkeit von Lösungen an geometrischen Gebilden und die Auflösung der betreffenden diophantischen Gleichungen haben vielfach das Interesse der Mathematiker erregt. Eine diophantische Gleichung kann dann als allgemein gelöst betrachtet werden, wenn es gelungen ist, die Unbekannten als rationale Funktionen gewisser Parameter mit rationalen Koeffizienten derart auszudrücken, daß die Gleichung identisch erfüllt ist, und daß sich umgekehrt die Parameter rational durch die Unbekannten der Gleichung darstellen lassen.

Eine solche Lösung einer diophantischen Gleichung, die ich im folgenden als allgemeinste Lösung bezeichnen will, braucht indessen nicht alle rationalen Werte der Unbekannten zu liefern, die der Gleichung Genüge leisten, sondern es können immer noch singuläre Lösungen auch in unendlicher Zahl vorhanden sein, die in den Parameterdarstellungen nicht enthalten sind, solange man im Bereich der rationalen Zahlen bleibt. Dies möge folgendes Beispiel zeigen: Die Gleichung

$$(x-y)^2(x^2-y^2-1)-z^2=0$$

ist identisch erfüllt durch

$$x=\frac{1+p^2+q^2}{1-p^2-q^2}, \qquad y=\frac{2p}{1-p^2-q^2}, \qquad z=\frac{2q(1-2p+p^2+q^2)}{(1-p^2-q^2)^2},$$

während andererseits p und q rationale Funktionen von x, y und z sind:

$$p=\frac{y}{x+1} \quad \text{und} \quad q=\frac{z}{(x+1)(x-y)}.$$

In diesen Formeln sind die Werte $x = y$, $z = 0$ nicht enthalten, weil stets

$$x - y = \frac{(1-p)^2 + q^2}{1 - p^2 - q^2}$$

von Null verschieden ist.

Zumeist gelingt es nicht, eine allgemeinste Lösung einer diophantischen Gleichung in dem angegebenen Sinn zu ermitteln. Man muß dann auf die letzte Forderung verzichten und sich entweder mit der Angabe einiger Zahlenwerte begnügen oder man kann die Unbekannten als rationale Funktionen von einem oder mehreren Parametern darstellen. Im letzteren Fall bilden die Lösungen eine unendliche Schar, ohne die ganze Mannigfaltigkeit aller Lösungen zu umfassen. Euler hat in seinen Eléments d'Algèbre eine Reihe von solchen Aufgaben gelöst. Dort gibt er für einzelne Fälle die Lösung der folgenden Aufgabe:

Bei gegebenen rationalen Werten a, b, c alle rationalen Zahlen x und y zu finden, sodaß

$$ax^2 + bx + c = y^2$$

wird. Die Frage, ob diese Aufgabe überhaupt Lösungen besitzt, konnte erst mit Hilfe der Theorie der quadratischen Reste entschieden werden. Die von Euler angegebenen Fälle lassen sich alle auf den einen Fall zurückführen, daß man eine spezielle Lösung kennt und daraus die allgemeinste Lösung ableitet. Dieser Fall ist deshalb sehr wichtig, weil er häufig bei geometrischen Problemen der vorliegenden Art eintritt. Man kann nämlich oft von einer Lösung ausgehen, bei der der Flächeninhalt eines Dreiecks oder das Volumen eines Tetraeders gleich Null gesetzt wird, um zu allgemeineren Lösungen zu gelangen. Hierin scheint überhaupt der innere Grund dafür zu liegen, daß es vielfach gelingt, die allgemeinste Lösung derartiger Probleme zu finden, die ihrer algebraischen Beschaffenheit nach recht schwierig erscheinen.

Zunächst soll noch die Lösung der oben angegebenen Eulerschen Aufgabe auf quadratische Formen von mehreren Variabelen ausgedehnt werden:

Bekanntlich läßt sich jede quadratische Form mit rationalen Zahlenkoeffizienten durch eine lineare Substitution, deren Koeffizienten ebenfalls rationale Zahlen sind, auf die Gestalt bringen.

$$F = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2 ,$$

wo die Größen a_k wiederum rationale Werte haben, und alle von Null verschieden sind. Damit $F = 0$ eine diophantische Gleichung ist, muß natürlich $n \geqq 3$ sein. Sind n Zahlen $y_1, y_2 \dots y_n$ bekannt, welche nicht alle gleich Null sind und der Bedingung

$$\sum_{k=1}^{n} a_k y_k^2 = 0$$

genügen, so kann die allgemeinste Lösung der Gleichung $F = 0$ folgendermaßen erhalten werden: Die Bezeichnung sei so gewählt, daß y_n von Null verschieden ist; dann kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit $y_n = x_n = 1$ annehmen.

Zunächst ist:

$$F(x_1, x_2 \dots x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k (x_k^2 - y_k^2) .$$

Die Größen $x_1, x_2 \dots x_{n-2}$ werden durch die Parameter p_1, $p_2 \dots p_{n-2}$ ersetzt vermöge der Relationen:

$$x_k = y_k + p_k (x_{n-1} - y_{n-1}), \quad k = 1, 2 \cdots n-2 .$$

Jetzt läßt sich $x_{n-1} - y_{n-1}$ wegheben und man erhält eine lineare Gleichung, um x_{n-1} als gebrochene rationale Funktionen von $p_1, p_2 \dots p_{n-2}$ auszudrücken. Damit sind auch die Größen x_1, $x_2 \dots x_{n-2}$ als rationale Funktionen von $p_1, p_2 \dots p_{n-2}$ bestimmt.

Euler hat ferner verschiedene Methoden gegeben, um einen Ausdruck von der Form $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ zu einem Quadrat $= y^2$ zu machen, wenn die Größen a, b, c, d, e gegebene rationale Werte haben. Daß es nicht möglich ist, im allgemeinen Fall diese Gleichung durch Parameterdarstellungen zu lösen, geht aus der Theorie der elliptischen Funktionen

hervor. Euler hat jedoch, indem er wieder von einer vorhandenen Lösung ausgeht, eine Methode angegeben, um zu einer ganzen Reihe von neuen Lösungen zu gelangen. Ist $x = x_0$ und $y = y_0$ eine Lösung der Gleichung, so bestimmt Euler eine Parabel: $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ derart, daß sie mit der Kurve $y^2 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ im Punkte $x = x_0$ eine Berührung zweiter Ordnung eingeht; daraus folgt, daß noch ein Schnittpunkt $x = x_1$ existiert, dessen Koordinaten ebenfalls rationale Zahlen sind. Dieses Verfahren muß jedoch versagen, sobald der Punkt x_1, y_1 mit dem Punkt x_0, y_0 zusammenfällt; tritt dieses nicht ein, so kann man das Verfahren abermals anwenden und so zu weiteren Lösungen gelangen.

Hierher gehört auch die Aufgabe, rationale Werte x und y zu finden, sodaß $F(x, y) = 0$ wird, unter der Voraussetzung, daß $F(x, y)$ eine nicht homogene, ganze, rationale Funktion vierten Grades mit rationalen Zahlenkoeffizienten ist, die in bezug auf jede der beiden Variabeln nur bis zum zweiten Grad ansteigt. Löst man die in x quadratische Gleichung $F(x, y) = 0$ nach x auf, so erscheint die Diskriminante als ganze Funktion vierten Grades von y, und es läßt sich das vorher angegebene Verfahren anwenden. Euler hat indessen einen anderen Weg eingeschlagen, um von einer vorhandenen Lösung zu neuen Lösungen zu gelangen (Comm. Arithm. coll. 2, S. 474).

Ist $x = x_0$ und $y = y_0$ eine rationale Lösung der Gleichung $F(x, y) = 0$, so hat die in bezug auf y quadratische Gleichung $F(x_0, y) = 0$ eine rationale Wurzel $y = y_0$, daher muß auch die andere Wurzel $y = y_1$ eine rationale Zahl sein. Jetzt behalte man den Wert $y = y_1$ bei und findet dann in derselben Weise außer $x = x_0$ noch einen Wert $x = x_1$, sodaß $F(x_1, y_1) = 0$ ist. Dieses Verfahren kann man wiederholen und so zu neuen Lösungen gelangen. Diese Methode, die im folgenden kurz das „Eulersche Verfahren“ genannt wird, läßt sich auch dann anwenden, wenn die Koeffizienten der Funktion $F(x, y)$ rationale Funktionen von einem oder mehreren Parametern sind. Die Werte x_0, y_0, x_1, y_1 usw. sind dann ebenfalls rationale Funktionen derselben Parameter.

Daß es sich hierbei im wesentlichen um das Additionstheorem der elliptischen Funktion handelt, hat Jacobi gezeigt in seiner Abhandlung: De usu theoriae integralium ellipticorum et abelianorum in analysi diophantea. (Journal f. Math., Bd. 13).

In seiner Doktor-Dissertation über „Rationale Tetraeder" hat Herr Otto Schulz mit den entsprechenden Literaturangaben eine vollständige Zusammenstellung der Ergebnisse mitgeteilt, die bis jetzt in den Problemen der Ganzzahligkeit von Lösungen an geometrischen Gebilden erzielt worden sind. Gleichzeitig hat Herr Schulz durch eigene Untersuchungen diese Probleme wesentlich gefördert. Es soll daher die vorliegende Abhandlung auf Vollständigkeit in der Angabe der Literatur und der bisher erzielten Resultate keinen Anspruch machen. Vielmehr ist meine Absicht, die erwähnte Arbeit in einigen Richtungen zu ergänzen. Dabei werde ich in den meisten Fällen, um den Umfang der Arbeit durch zu lange Formeln nicht unnütz zu vergrößern, auf eine explizite Darstellung der Lösungsformeln verzichten und nur angeben, wie die betreffenden Parameterdarstellungen erhalten werden können.

Unter einem rationalen Dreieck, Viereck oder Tetraeder, die den Gegenstand dieser Untersuchung bilden, ist ein solches geometrisches Gebilde zu verstehen, bei dem die Maßzahlen gewisser vorgeschriebener Stücke oder, um mich kürzer auszudrücken, die Stücke selbst rational sind. Hat man einmal die Rationalität der betreffenden Größen erreicht, so kann man durch Multiplikation mit einem Proportionalitätsfaktor auch die Ganzzahligkeit derselben erzielen. Dieser Proportionalitätsfaktor wird bei der Anzahl der willkürlichen Parameter nicht mitgezählt.

I. Rationale Dreiecke.

Längst bekannt ist die allgemeinste Lösung der Aufgabe: alle pythagoreischen Dreiecke (d. h. rechtwinkelige Dreiecke mit rationalen Seiten) zu finden. Schon die Ägypter sollen die Zahlen 3, 4 und 5, ohne den Zusammenhang zu kennen, zur Konstruktion eines rechten Winkels benutzt haben.

Der indische Mathematiker Brahmegupta, der ca. 600 Jahre n. Chr. gelebt hat, besaß die allgemeinste Lösung. Dann findet sie sich bei Vieta: Opera mathematica, herausgegeben von Schooten im Jahre 1646, S. 39—41.

Sind a und b die Katheten, c die Hypothenuse, p und q zwei teilerfremde ganze Zahlen, so ist: $a = 2pq$, $b = p^2 - q^2$, $c = p^2 + q^2$ die gewünschte Lösung.

Herr Geh. Rat Prof. Dr. H. A. Schwarz teilt mir die Tatsache mit, daß stets eine der drei Zahlen a, b, c durch 5 teilbar sein muß. Dieser Satz läßt sich am einfachsten so beweisen: Ist p oder $q \equiv 0 \pmod 5$, so ist $a \equiv 0 \pmod 5$. Andernfalls ist nach dem Fermatschen Satze $p^4 \equiv 1 \pmod 5$ und $q^4 \equiv 1 \pmod 5$, daher ist $b \cdot c = p^4 - q^4 \equiv 0 \pmod 5$; also ist entweder b oder $c \equiv 0 \pmod 5$.

Durch Zusammensetzung zweier solcher pythagoreischen Dreiecke mit einer gemeinsamen Kathete, was man durch Hinzufügen eines Proportionalitätsfaktors stets erreichen kann, erhält man alle Dreiecke, bei denen der Inhalt, die Seiten und damit auch die Höhen und die Radien des Inkreises, der drei Ankreise und des umbeschriebenen Kreises rational sind, und die man als heronische Dreiecke zu bezeichnen pflegt. Auf diese Weise haben Brahmegupta und später Vieta die vorliegende Aufgabe behandelt. Eine etwas andere Darstellung

ergibt sich aus der Tatsache, daß bei jedem heronischen Dreieck auch die Sinus und Cosinus der Dreieckswinkel und damit auch die Cotangenten der halben Winkel rational sein müssen.

Auch die Aufgabe, alle Dreiecke mit rationalen Seiten und Winkelhalbierenden zu finden, läßt sich unter Benutzung der trigonometrischen Funktionen am einfachsten lösen. Denn es lassen sich die drei Seiten und die drei Winkelhalbierenden rational durch die Tangenten der vierten Teile der Dreieckswinkel ausdrücken, die auch umgekehrt als rationale Funktionen der Seiten und Winkelhalbierenden erscheinen.

Bedeutend schwieriger als diese Aufgaben ist die Auffindung von Dreiecken mit rationalen Seiten und Mittellinien. In den Sitzungsberichten der Berliner mathematischen Gesellschaft (5. Jahrgang, 39. Sitzung) findet sich eine Abhandlung von Herrn Dr. Güntsche: „Über heronische Dreiecke mit einer rationalen Mittellinie". Vorher wurde dieselbe Aufgabe von Herrn Schubert behandelt. In der erwähnten Arbeit finden sich Lösungen dieser Aufgabe, die einen willkürlichen Parameter enthalten. Allgemein läßt sich diese Aufgabe wahrscheinlich nicht lösen.

Euler hat die allgemeine Frage behandelt: Dreiecke zu finden, bei denen die Seiten- und Mittellinien rationale Zahlen sind (Opera minora coll. Tom. I, S. 507 bis 515). Eine Parameterdarstellung hat Euler hiervon nicht gegeben; er fand nur Zahlenbeispiele, von denen ich folgende anführen will:

Es seien a, b, c die Seiten, s_a, s_b, s_c die Mittellinien des Dreiecks, dann sind solche Dreiecke:

1. $a = 316, \quad b = 254, \quad c = 262,$
   $s_a = 204, \quad s_b = 261, \quad s_c = 255.$

2. $a = 138, \quad b = 174, \quad c = 170,$
   $s_a = 158, \quad s_b = 127, \quad s_c = 131.$

Im folgenden Abschnitt gebe ich meine eigenen Untersuchungen über diesen Gegenstand wieder, wobei die sechs Größen

als rationale Funktionen eines Parameters ausgedrückt werden. Eine allgemeine Lösung dieser Aufgabe dürfte wahrscheinlich nicht existieren.

Bekanntlich ist:

$$(2s_a)^2 = 2(b^2+c^2) - a^2,$$
$$(2s_b)^2 = 2(c^2+a^2) - b^2,$$
$$(2s_c)^2 = 2(a^2+b^2) - c^2.$$

Durch folgende Transformation gewinnt man hieraus drei homogene lineare Gleichungen in bezug auf a, b und c.

Man setze:

$$2s_a = x(a+b+c) + b - c,$$
$$2s_b = y(a+b+c) + c - a,$$
$$2s_c = z(a+b+c) + a - b.$$

und erhält nach Division durch $a+b+c$:

$$x^2(a+b+c) + 2x(b-c) = -a+b+c,$$
$$y^2(a+b+c) + 2y(c-a) = a-b+c,$$
$$z^2(a+b+c) + 2z(a-b) = a+b-c.$$

Betrachtet man x und y als willkürliche Parameter, so sind in den beiden ersten der drei vorstehenden Gleichungen alle Dreiecke enthalten, bei denen die Seiten und zwei Mittellinien s_a und s_b rationale Zahlen sind. Denn die beiden in a, b, c homogenen linearen Gleichungen liefern alsdann:

$$a = 2xy^2 + x^2y + 2xy - x^2 - y + 1,$$
$$b = -xy^2 - 2x^2y - y^2 + 2xy + x + 1,$$
$$c = x^2y - xy^2 + x^2 + 2xy + y^2 + x - y.$$

Nun müssen aber die Seiten a, b, c drei homogene lineare Gleichungen erfüllen, welche bekanntlich dann und nur dann eine von Null verschiedene Lösung zulassen, wenn die Determinante ihrer Koeffizienten verschwindet:

$$\begin{vmatrix} x^2+1 & x^2+2x-1 & x^2-2x-1 \\ y^2-2y-1 & y^2+1 & y^2+2y-1 \\ z^2+2z-1 & z^2-2z-1 & z^2+1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rechnet man die Determinante aus, so kommt:

$$3xyz(x+y+z)-(x-y+1)(y-z+1)(z-x+1)=0.$$

Wir erhalten also eine Gleichung zwischen x, y und z, die in bezug auf jede der Unbekannten vom zweiten Grade ist. Das in der Einleitung angegebene Eulersche Verfahren muß aber hier aus folgendem Grunde versagen: Behält man die Größen x und y bei und setzt anstatt x die andere Wurzel x' ein, so gehören die Werte x', y, z überhaupt keinem neuen Dreieck zu, weil die Größen a, b und c bereits durch y und z allein bestimmt sind.

Daher führen wir anstatt x und y zwei neue Größen λ und μ ein durch die Substitution:

$$\frac{y-z+1}{x}=\lambda \quad \text{und} \quad \frac{z-x+1}{y}=\mu.$$

Dann ist:

$$x=\frac{(1-z)\mu+z+1}{\lambda\mu+1} \quad \text{und} \quad y=\frac{(1+z)\lambda+z-1}{\lambda\mu+1},$$

und diese Ausdrücke für x und y eingesetzt, ergibt:

$$3z[z(\lambda\mu+\lambda-\mu+3)+\lambda+\mu]=\lambda\mu[-z(\lambda+\mu)+\lambda\mu+\mu-\lambda+3].$$

Aus dieser Gleichung kann man leicht durch Anwendung des Eulerschen Verfahrens eine Reihe von Lösungen mit einem Parameter ableiten. Ich will mich nur auf einen Typus beschränken, den ich erhalte, wenn ich $\lambda\mu+\lambda-\mu+3=0$ setze.

Dann wird:

$$\mu=\frac{\lambda+3}{1-\lambda}; \qquad z=\frac{2\lambda(\lambda+3)}{(1+\lambda)(3-\lambda)};$$

$$y=\frac{(\lambda^2+10\lambda-3)(1-\lambda)}{(3-\lambda)(1+\lambda)^2}; \qquad x=\frac{4(-\lambda^2-4\lambda+3)}{(3-\lambda)(1+\lambda)^2}.$$

Hierdurch sind a, b, c, s_a, s_b und s_c als rationale Funktionen von λ bestimmt. Setzt man z. B. $\lambda=\frac{1}{2}$, so findet man $x=\frac{8}{15}$; $y=\frac{1}{5}$; $z=\frac{14}{15}$; $a=466$; $b=884$; $c=510$; $s_a=683$; $s_b=208$; $s_c=659$.

II. Rationale Vierecke und Tetraeder.

Die ältesten Beispiele von Vierecken mit rationalen Seiten und Diagonalen finden sich bei den indischen Mathematikern Brahmegupta und Bhascara. Kummer hat in seiner Arbeit über „Vierecke, deren Seiten und Diagonalen rationale Zahlen sind“ (Journal f. Math., Bd. 37) die von Brahmegupta aufgestellten Sätze zur Konstruktion rationaler Dreiecke und Vierecke aus Colebrookes „Algebra with Arithmetic and Mensuration, translated from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara“ ins Deutsche übersetzt und gezeigt, daß die indischen Mathematiker die betreffenden Aufgaben dadurch gelöst haben, daß sie pythagoreische Dreiecke zusammengesetzt haben. Die von den Indern gefundenen rationalen Vierecke unterliegen nämlich der Einschränkung, daß die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.

Die Arbeit Kummers beruht auf dem Satz, daß in jedem Viereck der verlangten Art auch die Abschnitte der Diagonalen rational sein müssen. Bezeichne ich in dem Viereck $ABCD$ den Schnittpunkt der Diagonalen mit E und setze: $AE = a$, $BE = \beta$, $CE = \gamma$, $DE = \delta$, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ und $\cos(AEB) = k$, dann ist $\cos(BEC) = -k$ und

$$a^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\,\alpha\beta k, \qquad b^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\,\beta\gamma k,$$
$$c^2 = \delta^2 + \gamma^2 - 2\,\delta\gamma k, \qquad d^2 = \alpha^2 + \delta^2 + 2\,\alpha\delta k.$$

Kummer ersetzt die Seiten a, b, c, d durch vier Größen ξ, η, x und y vermittels folgender Substitutionen:

$$a = (\xi + k)\,\beta - \alpha, \qquad b = (\eta - k)\,\beta - \gamma,$$
$$c = (y + k)\,\gamma - \delta, \qquad d = (x - k)\,\alpha - \delta.$$

Dadurch erhält man vier homogene lineare Gleichungen in bezug auf α, β, γ und δ. Setzt man die Determinante der Koeffizienten $= 0$, so erhält man folgende Relation, deren Bestehen notwendig und hinreichend ist, um Vierecke mit rationalen Seiten und Diagonalen zu erhalten:

$$[(\eta - k)^2 - 1]\,[(y + k)^2 - 1]\,\xi x = [(\xi + k)^2 - 1]\,[(x - k)^2 - 1]\,\eta \cdot y.$$

Die Größen ξ, η und k sollen als willkürliche Parameter betrachtet werden. Will man außerdem noch rationalen Flächeninhalt haben, so muß $\sin(AEB) = \sqrt{1-k^2}$ rational sein, also muß k die Form

$$k = \frac{1-p^2}{1+p^2}$$

annehmen. Obige Gleichung ist erfüllt, wenn man $x = \eta$ und $y = \xi$ setzt. Die dadurch erhaltenen Lösungen stellen alle rationale Vierecke dar, die sich einem Kreis einbeschreiben lassen.

Um zu anderen Lösungen zu gelangen, muß man die Gleichung so transformieren, daß man das Eulersche Verfahren anwenden kann. Zu diesem Zweck ersetzt Kummer y durch eine Größe z vermöge der Substitution $xy = z$ und erhält so eine Gleichung, welche in bezug auf x und z vom zweiten Grade ist, und das Eulersche Verfahren kann Verwendung finden. Als Anfangswerte kann man $x = 0$ und $z = 0$ benutzen. Auf diese Weise ist es Kummer gelungen, eine Reihe von verschiedenen Typen rationaler Vierecke mit drei Parametern zu geben.

Im engsten Zusammenhang mit der Theorie der rationalen Vierecke steht das Problem: Alle Tetraeder zu bestimmen, bei welchen die sechs Kanten und das Volumen rationale Zahlen sind. Eine vollständige Lösung dieser Aufgabe ist bis jetzt noch nicht gefunden worden.

Euler hatte zuerst Tetraeder dieser Art angegeben (Opera posthuma tombe I, pag. 103). Er behandelt den Fall, daß drei an einer Ecke liegende Winkel rechte sind. Die ersten allgemeineren Lösungen hat Herr Schwering mitgeteilt (Journal f. Math., Bd. 115, S. 302).

In der erwähnten Arbeit des Herrn Otto Schulz findet sich die allgemeinste Lösung dieser Aufgaben für eine Reihe von speziellen Tetraedern und Vierecken, bei denen die Kanten bezw. die Seiten gewissen Einschränkungen unterworfen sind.

Es seien α, β, γ drei von einer Ecke ausgehende Kanten und a, b, c die entsprechenden gegenüberliegenden Kanten;

ferner bezeichne man die Cosinus derjenigen Winkel, welche die Kanten α, β und γ einschließen, mit λ, μ, ν, sodaß

$$\cos(\gamma, \beta) = \lambda, \quad \cos(\alpha, \gamma) = \mu \quad \text{und} \quad \cos(\alpha, \beta) = \nu$$

ist, und setze zur Abkürzung:

$$(1) \qquad 1 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + 2\lambda\mu\nu = \varrho^2;$$

dann ist das Volum $V = \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma\varrho$. Herr Schwering sucht zunächst rationale Werte λ, μ, ν zu finden, für welche ϱ rational wird. Zu diesem Zweck schreibt er Gleichung (1) in der Form:

$$(1 - \lambda^2)(1 - \nu^2) - (\lambda\nu - \mu)^2 = \varrho^2.$$

Hieraus zieht Herr Schwering den folgenden Schluß: „$(1 - \lambda^2)(1 - \nu^2)$ muß als Summe zweier Quadrate dargestellt werden können; erteilen wir also $1 - \lambda^2$ und $1 - \nu^2$ Bruchform, so wird der Nenner eine Quadratzahl, der Zähler muß bei der Zerlegung in Primfaktoren solche von der Form $4n + 3$ nur in einer geraden Potenz enthalten. Man kann also $1 - \lambda^2$ als Summe zweier Quadrate darstellen“. Diese Bedingung ist wohl hinreichend, aber nicht notwendig, denn es kann sehr wohl eintreten, daß der Zähler von $1 - \lambda^2$ Primfaktoren von der Form $4n + 3$ in einer ungeraden Potenz enthält, die dann in dem Zähler von $1 - \nu^2$ ebenfalls in einer ungeraden Potenz enthalten sein müssen. Die allgemeinste Lösung kann aus dem in der Einleitung angegebenen Satz über quadratische Formen erhalten werden. Denn betrachtet man ν als beliebig gegebene, konstante Größe, so hat man eine quadratische Form in λ, μ und ϱ mit einer bekannten Lösung, nämlich $\lambda = 1$, $\mu = \nu$, $\varrho = 0$. Es sollen jedoch hier die Parameter p und q in etwas anderer Weise eingeführt werden als in der Einleitung: wir schreiben:

$$\varrho = q(1 + \lambda)(1 - \nu), \quad \mu = -p(1 + \lambda)(1 - \nu) + \nu\lambda.$$

Für $q = 0$ wird $\varrho = 0$ und $V = 0$, und man erhält Vierecke mit rationalen Seiten und Diagonalen.

Setzt man die Ausdrücke für ϱ und μ in (1) ein, so läßt sich $(1 + \lambda)(1 - \nu)$ wegheben und man erhält zur Bestimmung von λ:

$$(1 - \lambda)(1 + \nu) = (p^2 + q^2)(1 + \lambda)(1 - \nu),$$

woraus sich folgende Lösung ergibt:

$$\lambda = \frac{1 - \frac{1-\nu}{1+\nu}(p^2+q^2)}{1 + \frac{1-\nu}{1+\nu}(p^2+q^2)},$$

$$\mu = \frac{\left[1 - \frac{1-\nu}{1+\nu}(p^2+q^2)\right]\nu - 2p(1-\nu)}{1 + \frac{1-\nu}{1+\nu}(p^2+q^2)}, \tag{2}$$

$$\varrho = \frac{2q(1-\nu)}{1 + \frac{1-\nu}{1+\nu}(p^2+q^2)}.$$

Nimmt man hierin $|\nu| < 1$, so werden auch $|\lambda| < 1$ und $|\mu| < 1$ und man erhält ein Tetraeder dessen Seitenflächen reell sind. Ist dagegen $|\nu| > 1$, so werden auch $|\lambda| > 1$ und $|\mu| > 1$ und man erhält ein Tetraeder, dessen Volumen und Kanten zwar reell sind, aber dessen Seitenflächen imaginären Inhalt haben.

Beispiele:

1. $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$, $\nu = \frac{2}{3}$, $\lambda = \frac{4}{5}$, $\mu = \frac{1}{3}$, $\varrho = \frac{2}{5}$.
2. $p = \frac{3}{5}$, $q = \frac{4}{5}$, $\nu = \frac{2}{3}$, $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = \frac{1}{9}$, $\varrho = \frac{4}{9}$.
3. $p = 0$, $q = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{4}$, $\varrho = \frac{3}{4}$.

Damit ist natürlich das Problem der rationalen Tetraeder noch nicht gelöst, denn es müssen noch folgende Relationen erfüllt werden:

$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\lambda,$$
$$b^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\mu,$$
$$c^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\gamma.$$

Statt der Größen a, b und c führen wir drei neue Größen x, y und z ein:

$$a = x\beta + \gamma, \quad b = y\gamma + \alpha, \quad c = z\beta + \alpha. \tag{3}$$

Dadurch gehen obige Relationen über in:

$$\beta(1-x^2) = 2\gamma(x+\lambda), \quad \gamma(1-y^2) = 2\alpha(y+\mu),$$
$$2\alpha(z+\nu) = \beta(1-z^2). \tag{4}$$

Hieraus folgt:

$$(5) \qquad (1-x^2)(1-y^2)(z+\nu) = 2(1-z^2)(x+\lambda)(y+\mu).$$

Die Größen x, y und z scheinen der Einschränkung zu unterliegen, daß ihre absoluten Werte kleiner als 1 sein müssen. Indessen können auch andere Werte zugelassen werden. Man erhält dann negative Werte für die Kanten. Da aber der Ausdruck für das Volumen nur von den Quadraten der Kanten abhängt, so darf man stets die negativen Werte durch die positiven ersetzen, ohne daß dadurch das Volumen geändert wird.

Das Bestehen der Gleichungen (1) und (5) ist auch hinreichend, um Tetraeder der verlangten Art zu erhalten. Diese beiden Gleichungen, die auch Herr Schulz benutzt hat, erweisen sich als zweckmäßig zur Auffindung der allgemeinsten Lösung für spezielle Typen. Für den Fall: $\lambda = \mu = \nu = 0$ hat Euler die Substitution:

$$x = \frac{zp+1}{z+p}$$

angewendet. Dadurch geht die Gleichung (5) über in:

$$(p^2-1)(1-y^2)z = 2y(p+z)(zp+1).$$

Diese Gleichung ist identisch erfüllt für:

$$z = -\frac{p^2+1}{4p} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{2(1-p^2)}{1+p^2}.$$

Herr Schwering hat gefunden, daß sich eine ähnliche Substitution auch bei dem allgemeinen Fall anwenden läßt. Eine viel einfachere Darstellung, die jedoch für $\lambda = \mu = \nu = 0$ nicht zu gebrauchen ist, ergibt sich, wenn man $x = z$ oder $y = z$ setzt. Man erhält so eine lineare Gleichung in z, während y oder x als willkürlicher Parameter auftritt. Diese Lösungen finden sich ebenfalls in der Arbeit des Herrn Schwering. Indem man die Größen λ, μ und ν aus den Formeln (2) entnimmt, erhält man die allgemeinste Lösung des Problems für folgende Typen von Tetraedern und Vierecken ($q = 0$):

Typus I:

$y = z$, dann ist nach den Gleichungen (3) $\frac{b-a}{\gamma} = \frac{c-a}{\beta}$ oder $a = \frac{b\beta - c\gamma}{\beta - \gamma}$.

Beispiel:

$\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{4}$, $\nu = \frac{1}{2}$, $\varrho = \frac{3}{4}$, $x = \frac{1}{2}$, $y = z = -\frac{1}{10}$,

$a = 70$, $b = 96$, $c = 91$, $\alpha = 99$, $\beta = 80$, $\gamma = 30$, $V = 29700$.

Typus II:

$x = z$, dann ist $\frac{a-\gamma}{\beta} = \frac{c-\alpha}{\beta}$ oder $a + \alpha = c + \gamma$.

1. Beispiel:

$\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = \frac{1}{9}$, $\nu = \frac{2}{3}$, $\varrho = \frac{4}{9}$, $y = \frac{1}{3}$, $x = z = 0$,

$a = 3$, $b = 4$, $c = 3$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 3$, $V = \frac{8}{3}$.

2. Beispiel:

$\lambda = \frac{4}{5}$, $\mu = \frac{1}{3}$, $\nu = \frac{2}{3}$, $\varrho = \frac{2}{5}$, $y = -2$, $x = z = -2$,

$a = -6$, $b = -11$, $c = -7$, $\alpha = 9$, $\beta = 8$, $\gamma = 10$, $V = 48$.

Kehrt man die Vorzeichen noch um: $a = 6$, $b = 11$, $c = 7$, so erhält man ein Tetraeder, in dem $a - \alpha = c - \gamma$ ist. Daß alle diese Tetraeder unter Typus II enthalten sind, ist ohne weiteres klar.

Setzt man noch $q = 0$, so erhält man alle Vierecke mit rationalen Seiten und Diagonalen, in welche sich ein Kreis einbeschreiben oder anbeschreiben läßt. Man kann auch noch erreichen, daß der Inhalt des Vierecks und der Radius des In- und Ankreises rationale Zahlen werden. Hierzu ist notwendig und hinreichend, daß der Flächeninhalt der einzelnen Teildreiecke rational wird. Denn bezeichne ich mit F_1 und F_2 die Flächeninhalte zweier Teildreiecke, sodaß $F_1 + F_2 = F$, dem Inhalt des ganzen Vierecks, wird, so sind F_1^2 und F_2^2 rational, ferner ist $F_1^2 = (F - F_2)^2 = F^2 - 2FF_2 + F_2^2$, woraus man ersieht, daß, wenn F rational sein soll, auch F_2 rational sein muß, dasselbe gilt für F_1.

Führt man in die Formeln (2) außerdem noch

$$\frac{1-\nu}{1+\nu} = s^2$$

ein, so ist $\sqrt{1-\nu^2}$ rational, sobald s rational ist; ferner ist

$$\lambda = \frac{1-(sp)^2}{1+(sp)^2}.$$

Daraus folgt, daß auch die Sinus der entsprechenden Winkel und somit auch die Inhalte der betreffenden Teildreiecke rational werden.

Der Radius r des Inkreises läßt sich ebenfalls rational ausdrücken, denn es ist: $F = r(a+\alpha)$. Als willkürliche Parameter treten also s, p und y auf.

Beispiel: $q=0$, $s=\frac{4}{7}$, $p=\frac{7}{6}$, $y=\frac{4}{5}$; ergibt folgendes Viereck:

$$\lambda = \frac{5}{13}, \quad \mu = -\frac{3}{5}, \quad \nu = \frac{33}{65}, \quad x = z = \frac{47}{65},$$

$$a = 305, \quad b = 119, \quad c = 298, \quad F = 19320,$$

$$\alpha = 63, \quad \beta = 325, \quad \gamma = 70, \quad r = 52\tfrac{1}{2}.$$

Im folgenden Abschnitt will ich solche Typen von rationalen Tetraedern behandeln, die nur von drei Parameter abhängen, bei denen also zwei Bedingungsgleichungen zwischen den Kanten gefordert werden.

Typus III:

Es seien drei an einer Ecke liegende Kanten einander gleich: $b=c=a$ oder $y=z=0$. Dann geht Gleichung (5) über in:

$$\nu(1-x^2) = 2\mu(x+\lambda) \quad \text{oder} \quad \mu^2 - 2\lambda\mu\nu + \nu^2 = \nu^2\left(x + \frac{1-x^2}{2(x+\lambda)}\right)^2.$$

Dieser Ausdruck wird in (1) eingesetzt:

$$1-\lambda^2-\nu^2\left(x+\frac{1-x^2}{2(x+\lambda)}\right)^2 = \varrho^2.$$

Zur Auflösung werden folgende Parameter r und s eingeführt:

$$\nu\left(x+\frac{1-x^2}{2(x+\lambda)}\right) = r(1-\lambda) \quad \text{und} \quad \varrho = s(1-\lambda).$$

Dann ist:

$$\lambda = \frac{r^2+s^2-1}{r^2+s^2+1}, \qquad \varrho = \frac{2s}{r^2+s^2+1},$$

$$\nu = \frac{4r\,[(r^2+s^2)(1+x)-1+x]}{(r^2+s^2+1)\,[(r^2+s^2)(1+x)^2+(1-x)^2]},$$

$$\mu = \frac{2r(1-x^2)}{(r^2+s^2)(1+x)^2+(1-x)^2}.$$

Beispiel: $r=1$, $s=2$, $x=0$ ergibt folgendes Tetraeder:

$$\lambda = \frac{2}{3}, \qquad \mu = \frac{1}{3}, \qquad \nu = \frac{4}{9}, \qquad \varrho = \frac{2}{3},$$

$$a = b = c = 9, \quad \beta = 8, \quad \gamma = 6, \quad \alpha = 6, \quad V = 48.$$

Typus IV:

Es sei $\beta = \gamma$ uud $b = c$, sodaß zwei Dreiecke kongruent sind und das Tetraeder eine Symmetrieebene besitzt, welche durch die Kante α geht und auf der gegenüberliegenden Kante α senkrecht steht. Aus den gestellten Bedingungen folgt $y = z$ und $\mu = \nu$. Die Gleichungen (1) und (5) nehmen jetzt folgende Gestalt an: $(1-\lambda)(1+\lambda-2\mu^2) = \varrho^2$ und $1-x^2 = 2(x+\lambda)$. Aus der letzteren Gleichung folgen:

$$1-\lambda = \frac{(1+x)^2}{2} \quad \text{und} \quad 1+\lambda = \frac{(1-x)(x+3)}{2},$$

dadurch geht erstere Gleichung über in:

$$(1+x)^2\left[\frac{1}{4}(1-x)(x+3)-\mu^2\right] = \varrho^2.$$

Jetzt führen wir für ϱ und μ die beiden Parameter m und n ein vermöge der Substitution:

$$\varrho = \frac{1}{2}(1+x)(x+3)m, \quad \mu = \frac{1}{2}(x+3)n,$$

dann erhalten wir:

$$x = \frac{1-3(m^2+n^2)}{1+m^2+n^2}, \quad \mu = \frac{2n}{1+m^2+n^2}, \quad \varrho = \frac{4m(1-m^2-n^2)}{(1+m^2+n^2)^2},$$

m, n und y treten hier als willkürliche Parameter auf.

Beispiel: $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{9}$ liefert folgendes Tetraeder:

$$x=-\frac{1}{3}, \quad \lambda=\frac{7}{9}, \quad \mu=\nu=\frac{2}{3}, \quad \varrho=\frac{4}{9},$$
$$a=8, \quad \beta=\gamma=9$$
$$a=6, \quad b=c=7 \qquad V=48.$$

Typus V:

Es seien die Summen je zweier gegenüberliegender Kanten einander gleich:

$a+\alpha=b+\beta=c+\gamma$ oder $z=x$ und $y=1-\frac{2(x+\lambda)}{1+x}$.

Mit Hilfe dieser Werte verwandelt sich die Gleichung (5) in:

$$(1+x)^2=2\cdot\frac{(1-\nu)(1-\lambda)}{1-\mu}.$$

Denn setzt man in Gleichung (5) $x=z$, so kommt zunächst:

$$(1-y^2)(x+\nu)=2(x+\lambda)(y+\mu)$$

und dann mit Rücksicht auf den vorstehenden Wert von $1-y=2\,\frac{x+\lambda}{1+x}$:

$$\frac{1+y}{y+\mu}=\frac{1+x}{x+\nu} \quad \text{oder} \quad \frac{1-\mu}{1+y}=\frac{1-\nu}{1+x}.$$

Da aber $1+y=\frac{2(1-\lambda)}{1+x}$ ist, so folgt weiter:

$$(1+x)^2=2\cdot\frac{(1-\nu)(1-\lambda)}{1-\mu}.$$

Entnimmt man noch die Größen λ und μ aus den Formeln (2), so ergibt sich schließlich eine lineare Gleichung in bezug auf ν. Daher lassen sich alle Stücke rational durch p, q und x ausdrücken:

$$\nu=\frac{4(p^2+q^2)-(1+x)^2[q^2+(1+p)^2]}{4(p^2+q^2)+(1+x)^2[q^2+(1+p)^2]}, \quad \lambda=\frac{4-(1+x)^2[q^2+(1+p)^2]}{4+(1+x)^2[q^2+(1+p)^2]}.$$

Die Tetraeder des Typus V haben noch die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sie eine Kantenberührungskugel besitzen, d. h. man kann eine Kugel derart in das Tetraeder hineinlegen,

daß sie alle sechs Kanten gleichzeitig berührt. Ich will noch zeigen, daß auch der Radius r dieser Kugel eine rationale Zahl wird.

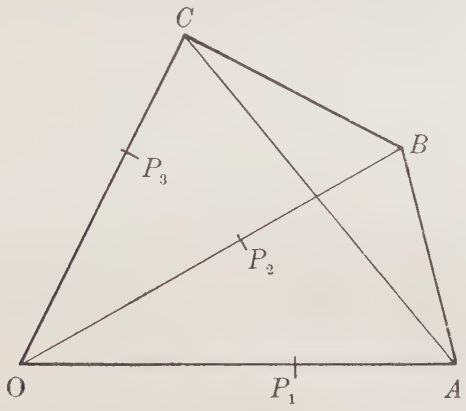

Fig. 1.

Es seien $OABC$ die Ecken des Tetraeders, P_1, P_2, P_3 die auf den Kanten OA, OB, OC liegende Berührungspunkte, ferner bezeichne m den Mittelpunkt der Kugel und M den Mittelpunkt und R den Radius des durch die Punkte P_1, P_2 und P_3 gehenden Kreises. Endlich setze man:

$$OP_1 = OP_2 = OP_3 = \delta_0, \quad AP_1 = \delta_1, \quad BP_2 = \delta_2, \quad CP_3 = \delta_3.$$

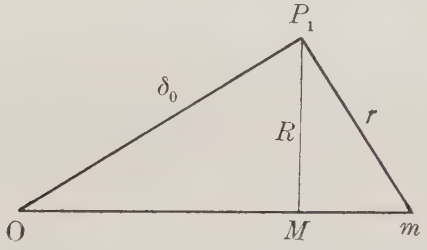

Fig. 2.

Nun ist Dreieck OP_1m ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Höhe R ist. Daher ist: $\delta_0^2 r^2 = R^2(\delta_0^2 + r^2)$. Aus dem Dreieck OP_1P_2 ergibt sich $P_1P_2 = \delta_0 \sqrt{2(1-r)}$, ebenso ist:

$$P_1P_3 = \delta_0 \sqrt{2(1-\mu)}, \quad P_2P_3 = \delta_0 \sqrt{2(1-\lambda)}.$$

Bezeichnet F den Inhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$, so ist:

$$2F^2R^2 = \delta_0^6(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu).$$

Nun drückt sich das Volumen des Tetraeders $OP_1P_2P_3$ in doppelter Form aus:

$$\frac{1}{6}\delta_0^3\varrho = \frac{1}{3}F\sqrt{\delta_0^2 - R^2},$$

daher ist:

$$4F^2(\delta_0^2 - R^2) = \delta_0^6\varrho^2.$$

Jetzt haben wir drei Gleichungen, aus denen r durch Elimination von F und R hervorgeht, nämlich:

$$r^2\varrho^2 = 2\delta_0^2(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu).$$

Führt man noch an Stelle von λ, μ und ν die Größen δ_0, δ_1, δ_2, δ_3 ein vermöge der Relationen:

$$1-\lambda = 2\frac{\delta_2\delta_3}{\beta\gamma}, \quad 1-\mu = 2\frac{\delta_1\delta_3}{\alpha\gamma}, \quad 1-\nu = 2\frac{\delta_1\delta_2}{\alpha\beta},$$

so läßt sich in der Gleichung für r auf beiden Seiten die Quadratwurzel ausziehen und man erhält:

$$r\alpha\beta\gamma\varrho = 4\delta_0\delta_1\delta_2\delta_3 \quad \text{oder} \quad 3rV = 2\delta_0\delta_1\delta_2\delta_3.$$

Damit ist gezeigt, daß sich der Radius der Kantenberührungskugel rational durch das Volumen und die Kanten ausdrückt.

Beispiele:

1. $p = -\frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$ ergibt folgende Werte:

$$\lambda = \frac{7}{11}, \quad \mu = \frac{107}{143}, \quad \nu = \frac{5}{13}, \quad \varrho = \frac{72}{143}, \quad y = -\frac{5}{11},$$
$$\alpha = 104, \quad \beta = 168, \quad \gamma = 77, \quad \delta_0 = 56, \quad \delta_1 = 48,$$
$$a = 133, \quad b = 69, \quad c = 160, \quad \delta_2 = 112, \quad \delta_3 = 21,$$
$$V = 112896, \quad r = 18\tfrac{2}{3}.$$

2. $p = -\frac{2}{5}$, $q = \frac{6}{5}$, $x = \frac{1}{3}$ ergibt folgende Werte:

$$\lambda = \frac{1}{9}, \quad \mu = \frac{1}{3}, \quad \nu = \frac{1}{3}, \quad \varrho = \frac{8}{9}, \quad y = \frac{1}{3},$$
$$\alpha = 2, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 3, \quad \delta_0 = 1, \quad \delta_1 = 1,$$
$$a = 4, \quad b = 3, \quad c = 3, \quad \delta_2 = 2, \quad \delta_3 = 2,$$
$$V = 2\tfrac{2}{3}, \quad r = 1,$$

Eine einfachere Darstellung dieser Tetraeder ergibt sich durch Einführung folgender Größen als Parameter:

$$\frac{1}{\delta_0}+\frac{1}{\delta_1}=x, \quad \frac{1}{\delta_2}+\frac{1}{\delta_3}=y, \quad \frac{1}{\delta_0}-\frac{1}{\delta_1}=u, \quad \frac{1}{\delta_2}-\frac{1}{\delta_3}=v.$$

Setzt man noch $2xy-u^2-v^2=w^2$, so ist $3V=\delta_0\delta_1\delta_2\delta_3 w$. Die Ausrechnung dieser Formel mag übergangen werden. Die Größen u, v, w und y sind willkürliche Parameter, x ist aus einer linearen Gleichung zu berechnen.

$$\delta_0=\frac{2}{x+u}, \quad \delta_1=\frac{2}{x-u}, \quad \delta_2=\frac{2}{y+v}, \quad \delta_3=\frac{2}{y-v}.$$

Beispiele:

1. $x=\frac{3}{5}$, $y=\frac{6}{5}$, $u=\frac{2}{5}$, $v=\frac{4}{5}$, $w=\frac{4}{5}$,
   $\delta_0=2$, $\delta_1=10$, $\delta_2=1$, $\delta_3=5$,
   $\alpha=12$, $\beta=3$, $\gamma=7$, $V=80$,
   $a=6$, $b=15$, $c=11$, $r=\frac{5}{12}$.

2. $x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{2}$, $u=-\frac{1}{3}$, $v=-\frac{1}{6}$, $w=\frac{1}{6}$,
   $\delta_0=-12$, $\delta_1=4$, $\delta_2=6$, $\delta_3=3$,
   $\alpha=-8$, $\beta=-6$, $\gamma=-9$, $V=48$,
   $a=9$, $b=7$, $c=10$, $r=12$.

Wie aus dem Beispiel 2 ersichtlich ist, sind in den angegebenen Formeln auch alle rationalen Tetraeder enthalten, bei denen die Kantenberührungskugel außerhalb liegt, bei denen also $a-\alpha=b-\beta=c-\gamma$ ist. Die Formeln behalten auch für diesen Fall ihre Gültigkeit.

III. Allgemeinere Typen rationaler Tetraeder.

Zur Auffindung allgemeinerer Typen rationaler Tetraeder benutze man wieder die beiden Gleichungen:

(1) $(1-\lambda^2)(1-\mu^2)-(\lambda\mu-\nu)^2=\varrho^2$,

(5) $(1-x^2)(1-y^2)(z+\nu)=2(x+\lambda)(y+\mu)(1-z^2)$.

Aus der letzten Gleichung wird ν ausgedrückt und in die erste Gleichung eingesetzt:

$$(1-\lambda^2)(1-\mu^2)-\left[\lambda\mu+z-\frac{2(x+\lambda)(y+\mu)(1-z^2)}{(1-x^2)(1-y^2)}\right]^2=\varrho^2.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist in bezug auf λ nur vom zweiten Grade, ebenso in bezug auf μ. Ist eine Lösung bekannt, so kann man unter Beibehaltung der Größen x, y, z und μ alle zugehörigen Werte λ und ϱ durch einen Parameter rational darstellen. Andererseits kann man zu jedem der so erhaltenen Werte λ alle zugehörigen Werte μ ermitteln, immer unter Beibehaltung der Größen x, y, z; die Größe μ erscheint also jetzt als Funktion zweier Parameter. Dieses Verfahren kann beliebig oft wiederholt werden, und so werden die Größen λ, μ und ϱ als Funktionen beliebig vieler Parameter dargestellt.

Würde man nun einen der vorher geschilderten Typen als Ausgangstetraeder nehmen, etwa $x=z$, so würde man natürlich nichts neues erhalten, weil die Größen x, y und z ungeändert bleiben. Man könnte nur dadurch zu allgemeineren Typen gelangen, daß man eine andere Ecke bevorzugt.

Daß es sich bei dem vorliegenden Problem, alle Tetraeder mit rationalen Kanten und rationalem Volumen zu finden, nur darum handelt, eine ganze Funktion zweiten Grades zu einem Quadrat zu machen, wurde zuerst von Herrn Ankum gefunden und zwar folgendermaßen:

Bekanntlich ist:

$$(6V)^2=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & a^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & \beta^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & \gamma^2 & 1 \\ a^2 & \beta^2 & \gamma^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Es sei nun a, b, c, α_0, β_0, γ_0, V_0 eine Lösung, dann setze man: $\alpha=\alpha_0\pm s$, $\beta=\beta_0\pm s$, $\gamma=\gamma_0\pm s$ in die Determinante ein und subtrahiere die mit s^2 multiplizierten Glieder der letzten Zeile und letzten Spalte von denen der vorletzten Zeile und vorletzten Spalte:

$$(6V)^2 = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & a_0^2 \pm 2a_0 s & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & \beta_0^2 \pm 2\beta_0 s & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & \gamma_0^2 \pm 2\gamma_0 s & 1 \\ a_0^2 \pm 2a_0 s & \beta_0^2 \pm 2\beta_0 s & \gamma_0^2 \pm 2\gamma_0 s & -2s^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Rechnet man diese Determinante aus, so erhält man, wie auch die Vorzeichen gewählt werden, stets die Form:

$$(6V)^2 = As^2 + Bs + (6V_0)^2.$$

Man drückt leicht s als Funktion von einem Parameter aus, sodaß V rational wird. Durch verschiedene Kombinationen der Vorzeichen kann man so unter Beibehaltung des einen Dreiecks mit den Seiten a, b und c vier verschiedene neue Serien von rationalen Tetraedern angeben. Dieselbe Transformation kann man nun an einer anderen Ecke vornehmen und so zu Lösungen gelangen, bei denen die Bestimmungsstücke des Tetraeders keinen ersichtlichen Einschränkungen unterliegen.

Herr Otto Schulz hat in der erwähnten Arbeit auch noch andere Methoden zur Auffindung allgemeinerer Typen veröffentlicht.

Die von mir angegebene Methode kommt in dem einen Fall auf dasselbe hinaus, wie die des Herrn Ankum. Denn setze ich: $b = b_0 + s$, $a = a_0 + s$ und $c = c_0 + s$, so bleiben gemäß den Gleichungen (3) und (4) x, y, z und λ ungeändert, während μ und ν als gebrochene lineare Funktionen von s erscheinen. Der andere Fall, bei dem μ beibehalten wird, läßt sich nicht mit der Ankumschen Darstellung identifizieren. Das von mir angegebene Verfahren bietet jedoch einen gewissen Vorteil, da man bei beliebig vorgegebenen Werten x, y, z ein Ausgangstetraeder finden kann.

Gleichung (1) ist erfüllt, wenn man $\mu = \pm 1$, $\nu = \pm\lambda$ und $\varrho = 0$ setzt. So erhält man nach (5) eine lineare Gleichung, um einen Anfangswert $\lambda = \lambda_0$ zu berechnen:

$$(1-x^2)(1-y^2)(z \pm \lambda_0) = 2(x \pm \lambda_0)(y \pm 1)(1-z^2).$$

Zu diesem Wert $\lambda = \lambda_0$ kann man jetzt alle zugehörigen Werte μ und ϱ angeben, da eine Lösung $\mu = \pm 1$ und $\varrho = 0$

bekannt ist. Damit ist zunächst wieder die allgemeinste Lösung eines speziellen Typus gegeben, der von vier Parametern abhängt. Denn es sind die Kanten einer Relation unterworfen, die in der zuletzt gegebenen Gleichung ausgedrückt ist. Von dieser Einschränkung kann man sich jetzt wieder frei machen, indem man λ als Funktion zweier Parameter darstellt.

Um dieses in einem Beispiel zu erläutern, wählen wir etwa: $x=-2$, $y=-3$, $z=-4$. Zwischen x, y und z besteht die Gleichung (5):

$$(1-x^2)(1-y^2)(z+\nu)=2(x+\lambda)(y+\mu)(1-z^2),$$

die für die gewählten Zahlenwerte übergeht in:

$$4(4-\nu)=5(2-\lambda)(3-\mu).$$

Für den Anfangswert $\mu=1$ und $\lambda=\nu$ ergibt sich:

$$2(4-\lambda_0)=5(2-\lambda_0) \quad \text{oder} \quad \lambda_0=\frac{2}{3}.$$

Diesen Wert $\lambda_0=\frac{2}{3}$ halten wir fest und bestimmen alle zugehörigen μ und ν. Es ist zunächst: $\nu=\frac{5}{3}\mu-1$. Dadurch wird die Gleichung (1) zu:

$$(1-\mu)(14\mu-4)=(3\varrho)^2.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\mu=\frac{2(1+p^2)}{2+7p^2}, \qquad \varrho=\frac{10p}{3(2+7p^2)}.$$

$p=2$ liefert z. B. folgende Werte:

$$\lambda=\frac{2}{3}, \quad \mu=\frac{1}{3}, \quad \nu=-\frac{4}{9}, \quad \varrho=\frac{2}{9},$$

$$\alpha=27, \quad \beta=16, \quad \gamma=18,$$

$$a=14, \quad b=27, \quad c=37, \quad V=288.$$

Betrachten wir nun λ als variabel und halten den Wert

$$\mu=\frac{2(1+p^2)}{2+7p^2}$$

fest, so lautet Gleichung (1):

$$A\lambda^2+B\lambda+C=\varrho^2.$$

Hierin sind A, B, C rationale Funktionen von p. Da für $\lambda = \frac{2}{3}$

$$\varrho = \frac{10\,p}{3\,(2+7\,p^2)}$$

wird, so läßt sich die Gleichung auch so schreiben:

$$A\left[\lambda^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] + B\left(\lambda - \frac{2}{3}\right) = \varrho^2 - \left[\frac{10\,p}{3\,(2+7\,p^2)}\right]^2.$$

Durch die Substitution:

$$\lambda - \frac{2}{3} = q\left(\varrho - \frac{10\,p}{3\,(2+7\,p^2)}\right)$$

ergibt sich für λ folgender Ausdruck:

$$\lambda = \frac{2\,(2+7\,p^2) + 2\,q^2\,(12069\,p^4 + 2488\,p^2 + 144) - 80\,p\,q\,(2+7\,p^2)}{3\,(2+7\,p^2) + 3\,q^2\,(8289\,p^4 + 2408\,p^2 + 144)}.$$

$p = 2$, $q = \frac{3}{16}$ ergibt das Tetraeder:

$$\lambda = \frac{6}{7}, \quad \mu = \frac{1}{3}, \quad \nu = \frac{4}{21}, \quad \varrho = \frac{10}{21},$$

$$\alpha = 63, \quad \beta = 32, \quad \gamma = 42,$$

$$a = 22, \quad b = 63, \quad c = 65, \qquad V = 6720.$$

Halten wir jetzt das neue $\lambda = \frac{6}{7}$ fest, so bekommen wir alle zugehörigen Werte:

$$\mu = \frac{1}{3} \cdot \frac{19\,r^2 - 20\,r + 1}{1 + 29\,r^2}.$$

Z. B. $r = 1$ ergibt folgende Werte:

$$\lambda = \frac{6}{7}, \quad \mu = 0, \quad \nu = -\frac{2}{7}, \quad \varrho = \frac{3}{7},$$

$$\alpha = 28, \quad \beta = 16, \quad \gamma = 21,$$

$$a = 11, \quad b = 35, \quad c = 36, \qquad V = 672.$$

Bei den Methoden zur Auffindung allgemeinerer Typen von rationalen Tetraedern kann man die Anzahl der Parameter beliebig häufen, und die Mannigfaltigkeit der Lösungen ist außerordentlich groß. Da aber die allgemeinste Lösung des Problems nur fünf Parameter erfordern würde, so könnte man vermuten, daß man vielleicht durch die Ankumsche Methode, von einem Tetraeder ausgehend, alle rationalen Tetraeder erhalte.

Bei dieser Fragestellung bin ich durch Benutzung gewisser invarianter Primfaktoren zu folgenden Ergebnissen gekommen:

1. Legt man ein rationales Tetraeder als Ausgangstetraeder zugrunde, so existieren stets unendlich viele rationale Tetraeder, die man aus jenem nicht ableiten kann, wie man auch die angegebenen Transformationen anwenden mag.

2. Auch die von mir angegebene Lösung ist nicht die allgemeinste.

3. Nimmt man die Ankumsche Transformation nur an einer Ecke des Tetraeders vor, so kann man auch dann noch durch verschiedene Kombinationen der Vorzeichen beliebig viele Parameter einführen und zwar immer so, daß das dieser Ecke gegenüberliegende Dreieck unverändert beibehalten wird. Auch dadurch erhält man nicht alle rationalen Tetraeder, die dieses Dreieck als Grundfläche haben.

1. Beweis des ersten Satzes.

Zum Beweise des ersten Satzes benutze man die Determinante für das Volumen.

$$(2\cdot 12\,V)^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 & a^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 & \beta^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 & \gamma^2 \\ 1 & a^2 & \beta^2 & \gamma^2 & 0 \end{vmatrix}$$

und setze zur Abkürzung:

$$F_3 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & a^2 \\ 1 & c^2 & 0 & \beta^2 \\ 1 & a^2 & \beta^2 & 0 \end{vmatrix}, \qquad F_0 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

und

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & a^2 \\ 1 & c^2 & 0 & \beta^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

Dann ist bekanntlich

$$F_0 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$
$$F_3 = (\alpha+\beta+c)(-\alpha+\beta+c)(\alpha-\beta+c)(\alpha+\beta-c).$$

Dementsprechend sollen mit F_1 und F_2 die 16fachen Quadrate der Flächeninhalte der aus den Kanten β, γ, a und α, γ, b gebildeten Dreiecke bezeichnet werden. Unter Benutzung des Sylvesterschen Determinantensatzes ergibt sich folgende Beziehung:

$$2\cdot(12\,V)^2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 \\ 1 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -F_0 & D \\ D & -F_3 \end{vmatrix}$$

oder:

$$F_0 F_3 = D^2 + (24\,Vc)^2.$$

Hieraus folgt der Satz:

Wenn in einem Tetraeder die Kanten und das Volumen rationale Maßzahlen haben, so ist das Produkt, gebildet aus je zweien der Größen F_0, F_1, F_2, F_3 als Summe zweier Quadrate darstellbar.

Daher dürfen diese Produkte Primzahlen von der Form $4n+3$ nur in einer geraden Potenz enthalten. Wenn also eine solche Primzahl in F_0 in einer ungeraden Potenz vorkommt, so muß sie auch in jeder der anderen Größen F_1, F_2, F_3 in einer ungeraden Potenz enthalten sein. Wende ich nun auf irgend ein rationales Tetraeder, dessen Kanten ganzzahlig sind, eine der angegebenen Transformationen an, so bleibt zunächst das eine Dreieck, etwa das aus den Kanten a, b, c gebildete, unverändert, während im allgemeinen die drei anderen Kanten und das Volumen gebrochene Zahlen werden. Geht man wieder zu ganzen, teilerfremden Maßzahlen für die Kanten über, indem man alle Kanten mit einer ganzen oder gebrochenen Zahl t multipliziert, und bezeichnen wir die aus F_0, F_1, F_2, F_3 entstandenen Größen mit F_0', F_1', F_2', F_3', so ist: $F_0' = t^4 \cdot F_0$. Daraus folgt, daß jede Primzahl von der Form $4n+3$, die in F_0 in ungerader Potenz enthalten war, auch in F_0' und

nach dem obigen Satz auch in F_1', F_2', F_3' in ungerader Potenz vorkommen muß.

Daher kann man diese Zahlen als invariante Primfaktoren bezeichnen, weil bei den neu erhaltenen Tetraedern immer dieselben Primfaktoren in der angegebenen Form auftreten.

Bei der von mir angegebenen Methode, um von einer Lösung zu neuen rationalen Tetraedern zu gelangen, treten dieselben Primfaktoren als Invarianten auf. Denn die Zähler von $1-\lambda^2$, $1-\mu^2$ und $1-\nu^2$ sind gleich F_1, F_2 und F_3, die Nenner sind Quadrate. Da aber bei meiner Transformation stets λ oder μ unverändert bleibt, so bleiben auch bei allen so erhaltenen Tetraedern die betreffenden Primfaktoren unverändert.

Wie das zuletzt angegebene Zahlenbeispiel zeigt, kommen für den Anfangswert $\lambda_0 = \frac{2}{3}$ in dem Zähler von $1-\lambda_0^2 = \frac{5}{9}$ keine invarianten Primfaktoren vor, daher können auch bei den aus diesen erhaltenen Tetraeder keine solche Primfaktoren vorkommen.

Um ein rationales Tetraeder zu gewinnen, bei dem die invarianten Primfaktoren vorgegebene Werte haben, braucht man nur einen der Typen zu benutzen, bei dem ν als willkürlicher Parameter auftritt. Ist P ein Produkt verschiedener Primfaktoren von der Form $4n+3$, so setze man

$$\frac{1-\nu}{1+\nu} = P(m^2+n^2),$$

wo m und n beliebige rationale Zahlen sind. In den so erhaltenen Tetraedern kommen dann die in P enthaltenen Primzahlen und nur diese als invariante Primfaktoren vor. Da nun die Anzahl der für P in Betracht kommenden Werte unendlich groß ist, so kann ich also unendlich viele rationale Tetraeder angeben, von denen keins durch die angegebenen Transformationen in das andere übergeführt werden kann.

Um ein Beispiel anzuführen, soll ein rationales Tetraeder aufgestellt werden, dessen invarianter Primfaktor $P=3$ ist.

$$P=3, \quad m=\frac{1}{3}, \quad n=0,$$

dann ist $\nu = \frac{1}{2}$; ferner sei $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{4}$, $\varrho = \frac{3}{4}$. [Drittes Zahlenbeispiel für die Formeln (2)].

Man setze weiter $x = \frac{1}{2}$ und $y = z = -\frac{1}{10}$ (Typus I). Dann ergibt sich das Tetraeder:

$$a = 70, \quad b = 96, \quad c = 91,$$
$$\alpha = 99, \quad \beta = 80, \quad \gamma = 30. \quad V = 29700.$$

Hierfür ist:

$$F_0 = 3^3 \cdot 5^3 \cdot 13^2 \cdot 257, \quad F_1 = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^4,$$
$$F_2 = 3^7 \cdot 5^3 \cdot 11^2, \quad F_3 = 2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 11^2.$$

Die Zahl 3 ist in allen Größen F_0, F_1, F_2, F_3 in ungerader Potenz enthalten, sonst kommen keine invarianten Primfaktoren vor.

2. Beweis des zweiten Satzes.

Es fragt sich weiter, ob vielleicht nach Vorgabe der Größen x, y und z, die ja bei dem oben angegebenen Verfahren als willkürliche Parameter auftreten, die invarianten Primfaktoren bestimmt sind, und ob nicht in diesem Verfahren die allgemeinste Lösung enthalten ist. Daß es im algebraischen Sinn nicht die allgemeinste Lösung sein kann, geht aus folgender Überlegung hervor: Ist der Anfangswert $|\lambda_0| < 1$, so sind auch alle dazu gehörigen Werte $|\mu| < 1$ und umgekehrt: ist $|\lambda_0| > 1$, so ist auch immer $|\mu| > 1$, weil ja stets $(1 - \lambda^2)(1 - \mu^2) > 0$ sein muß. Es kann also mit dieser Methode niemals aus einem Tetraeder mit reellen Seitenflächen ein Tetraeder mit imaginären Seitenflächen erhalten werden.

Daß aber diese Lösung auch nicht alle Tetraeder mit reellen Seitenflächen enthalten kann, möge folgendes Zahlenbeispiel beweisen:

Setzt man $x = \frac{41}{24}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = \frac{41}{24}$, so ist einerseits $\lambda = \frac{1}{6}$, $\mu = \frac{3}{4}$, $\nu = -\frac{11}{24}$, $\varrho = \frac{7}{24}$ ein zu x, y, z gehöriges Wertsystem mit dem invarianten Primfaktor 7, denn die Größe F_2 ist, von einem quadratischen Faktor abgesehen, gleich $1 - \mu^2 = \frac{7}{16}$.

Andererseits ist $\lambda = 1$, $\mu = \nu = \frac{383}{448}$, $\varrho = 0$ ein zu denselben x, y, z gehöriges Wertsystem mit dem invarianten Primfaktor 3, denn

$$1 - \mu^2 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 277}{448^2}.$$

Jedes von diesen Wertsystemen liefert zu denselben x, y, z unendlich viele Lösungen, aber keine von den aus dem einen Wertsystem hervorgehenden Lösungen kann in der anderen Reihe enthalten sein.

3. Beweis des dritten Satzes.

Nach der Ankumschen Methode kann man auch dann noch beliebig viele Parameter einführen, wenn man das eine Dreieck beibehält und die Transformation nur an einer Ecke vornimmt. Wie man rationale Tetraeder mit einem vorgegebenen Dreieck gewinnen kann, ist in der Arbeit des Herrn Otto Schulz ausgeführt.

Ist das aus den Kanten a, b, c gebildete Dreieck gegeben, so suche man einen Punkt in der Ebene dieses Dreiecks auf, dessen Verbindungslinien α, β, γ mit den drei Eckpunkten des Dreiecks rational sind.

Dieser Punkt darf jedoch nicht mit einer Ecke des Dreiecks zusammenfallen. Es ist leicht solche Punkte zu finden.

Diese Werte kann man dann als Ausgangstetraeder benutzen und durch die Substitution $\alpha = \alpha_0 \pm s$, $\beta = \beta_0 \pm s$, $\gamma = \gamma_0 \pm s$ zu neuen, reellen Tetraedern gelangen, deren Volumen nicht verschwindet.

Es fragt sich, ob man so nicht alle rationalen Tetraeder gewinnen kann, die dieses Dreieck zur Grundfläche haben. Ich will noch den Nachweis führen, daß auch so nicht die allgemeinste Lösung mit dem vorgegebenen Dreieck erhalten werden kann.

Das Produkt $F_0(\alpha+\beta+c)(\alpha+\beta-c)(\alpha-\beta+c)(-\alpha+\beta+c)$ ist gleich der Summe zweier Quadrate. P sei das Produkt der invarianten Primfaktoren.

Es sei ferner Q ein Produkt von solchen Primfaktoren von der Form $4n+3$, die nicht in P vorkommen, die aber in $(\alpha+\beta+c)(\alpha+\beta-c)$ in einer ungeraden Potenz enthalten sind. Dann müssen die Primfaktoren der Zahl Q auch in $(\alpha-\beta+c)(-\alpha+\beta+c)$ in einer ungeraden Potenz vorkommen. Sind solche Primfaktoren überhaupt nicht vorhanden, so soll $Q=1$ sein. Macht man nun eine der Substitutionen $\alpha=\alpha_0\pm s$, $\beta=\beta_0\pm s$, $\gamma=\gamma_0\pm s$, so bleibt, wenn man in den Ausdrücken für α und β die gleichen Vorzeichen wählt, die Differenz $\alpha-\beta$ unverändert, im andern Fall bleibt die Summe $\alpha+\beta$ unverändert. Auf jeden Fall ändert sich nur einer der beiden Faktoren $(\alpha+\beta+c)(\alpha+\beta-c)$ oder $(\alpha-\beta+c)(-\alpha+\beta+c)$. Geht man wieder zu ganzen teilerfremden Zahlen über, so ändert sich der eine dieser beiden Faktoren nur so, daß er mit einer ganzen oder gebrochenen Quadratzahl multipliziert wird. Daher bleibt bei den neuerhaltenen Tetraedern die Zahl Q unverändert. An einem Zahlenbeispiel soll noch gezeigt werden, daß es rationale Tetraeder mit derselben Grundfläche gibt, für welche die Zahl Q verschieden ist:

1. $a=3\cdot 77,\quad b=4\cdot 77,\quad c=2\cdot 77,$
   $\alpha=82,\quad \beta=149,\quad \gamma=236,$
   $V=2\cdot 3\cdot 7^2\cdot 11^2=35574.$

2. $a=3\cdot 220,\quad b=4\cdot 220.\quad c=2\cdot 220,$
   $\alpha=574,\quad \beta=141,\quad \gamma=684,$
   $V=2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11=93950.$

Beim ersten Beispiel ist $F_0=77^4\cdot 9\cdot 5\cdot 3$

$$(\alpha+\beta+c)(\alpha+\beta-c)=11^2\cdot 5\cdot 7^2$$
$$(\alpha-\beta+c)(-\alpha+\beta+c)=3\cdot 13\cdot 17\cdot 29,$$

daher ist $P=3,\ Q=1$.

Beim zweiten Beispiel ist $F_0=220^4\cdot 9\cdot 5\cdot 3$

$$(\alpha+\beta+c)(\alpha+\beta-c)=11^2\cdot 5^3\cdot 3\cdot 7$$
$$(\alpha-\beta+c)(-\alpha+\beta+c)=97^2\cdot 3^2\cdot 7,$$

daher ist $P=3,\ Q=7$.

Da also für beide Beispiele die Zahl Q verschieden ist, so kann unter Beibehaltung des einen Dreiecks mittels der Ankumschen Transformation nicht das eine Tetraeder aus dem andern erhalten werden.

Man kann noch in verschiedener Weise das Problem, alle rationalen Tetraeder zu finden, auf die Form bringen, eine ganze Funktion $F(x, y)$ zu einem Quadrat zu machen, sodaß die Funktion F in bezug auf jede der Variabeln nur vom zweiten Grade ist. Doch lassen sich bei allen mir bekannten anderen Methoden stets invariante Primfaktoren finden. Die zuletzt angestellten Betrachtungen mögen nur als Beispiele dienen, wie man in diesen Fällen den Beweis zu führen hat, daß die Lösung nicht die allgemeinste ist.

Lebenslauf.

Am 1. Oktober 1883 wurde ich, Fritz Neiß (evangelischen Bekenntnisses), als Sohn des verstorbenen praktischen Arztes Dr. med. F. Neiß zu Dietzenbach, Kr. Offenbach (Hessen) geboren. Ich besuchte zuerst das Gymnasium zu Gießen bis Obersekunda und trat dann als Lehrling in einer Apotheke zu Bad Nauheim ein. Nach $1^1/_2$ Jahren gab ich diesen Beruf auf und ging auf das Gymnasium nach Friedberg (Hessen), wo ich Ostern 1905 das Zeugnis der Reife erhielt. Von da ab widmete ich mich hauptsächlich dem Studium der Mathematik und studierte zuerst in Gießen ein Semester. Hier hörte ich Vorlesungen bei den Herren Professoren: König, Naumann, Netto, Pasch. Michaelis 1905 bezog ich die Universität Berlin und genügte meiner Militärpflicht vom 1. April 1908 bis 31. März 1909. Ich besuchte die Vorlesungen der Herren Professoren: Dessoir, Drude, Erdmann, E. Fischer, Frobenius, Hettner, Knoblauch, Landau, Marcuse, Münch, Planck, Riehl, Schottky, Schur, H. A. Schwarz. Außerdem beteiligte ich mich an den Übungen des mathematischen Seminars, an den von Herrn Professor H. A. Schwarz geleiteten mathematischen Colloquien, an den mathematisch-physikalischen Übungen des Herrn Professor Planck sowie an den unter Leitung der Herren Professoren Blasius und Drude stehenden Übungen zur Experimentalphysik.

Allen meinen verehrten Lehrern, besonders Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. H. A. Schwarz, dem ich die Anregung

zu dieser Arbeit verdanke, fühle ich mich zu großem Danke verpflichtet.

Am 7. und 8. November 1910 bestand ich die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen. Von Ostern 1911 bis Ostern 1912 leistete ich mein Seminarjahr an dem Königl. Gymnasium zu Landsberg (Warthe) ab und bin seit Ostern 1912 am Realgymnasium zu Berlin-Lichterfelde tätig. Ostern 1913 erhielt ich das Zeugnis der Anstellungsfähigkeit.